



Universidad de Navarra

Documento de Investigación

DI nº 237
Octubre, 1992

NORMALIDAD DE LOS RENDIMIENTOS BURSATILES

Eduardo Martínez Abascal*
María Luisa Arnillas**

* Profesor de Dirección Financiera, IESE

** Facultad de Económicas. Universidad del País Vasco

IESE Business School – Universidad de Navarra

Avda. Pearson, 21 – 08034 Barcelona, España. Tel.: (+34) 93 253 42 00 Fax: (+34) 93 253 43 43

Camino del Cerro del Águila, 3 (Ctra. de Castilla, km 5,180) – 28023 Madrid, España. Tel.: (+34) 91 357 08 09 Fax: (+34) 91 357 29 13

Copyright © 1992 IESE Business School.

NORMALIDAD DE LOS RENDIMIENTOS BURSATILES

Resumen

En este artículo se estudia la bondad del ajuste a una distribución normal de las rentabilidades del mercado español, americano y algunos de los principales mercados europeos, así como de algunos valores de empresas americanas y españolas. Para ello se realizan diferentes tests de normalidad y se trata, en su caso, de determinar las características concretas de cada muestra que la apartan de la normalidad.

NORMALIDAD DE LOS RENDIMIENTOS BURSÁTILES

Introducción

En este trabajo se estudia la distribución de las rentabilidades bursátiles del mercado español, americano y algunos de los principales mercados europeos, así como de algunas acciones de empresas americanas y españolas. Se tratará de verificar si estas rentabilidades siguen una distribución normal. Nos centramos sobre todo en el estudio de series diarias, mensuales y anuales.

Los resultados son de especial interés para el inversor por dos motivos: primero, porque conocer la distribución de los rendimientos dará información más detallada al inversionista, que desea conocer los rendimientos y riesgos de sus inversiones, pues si la distribución no es normal quizá deba reconsiderar su medida del riesgo. La segunda razón por la que deseamos saber si el reparto de rendimientos se distribuye normalmente es que ésta es una condición suficiente (aunque no necesaria) para que podamos utilizar todo el aparato de estadística clásica en la estimación de intervalos de confianza, contratación de hipótesis, etc.

La posible no normalidad de algunas series trae como consecuencia que la media y la varianza pueden no describir enteramente la distribución de los rendimientos. Esto nos obliga a estudiar otras características de la serie, como son su asimetría y su curtosis. Estas características de las series son importantes para el inversor, ya que estos dos parámetros dan una idea bastante detallada de la distribución de los rendimientos. Cuanto más detalle tenga el inversor sobre el comportamiento de las rentabilidades, mejor podrá medir el riesgo de sus inversiones.

La hipótesis de que los rendimientos se encuentran normalmente distribuidos ha sido fuertemente debatida en el mundo académico para el caso del mercado norteamericano, llegando a las siguientes conclusiones:

- a) Los rendimientos diarios de las empresas y de índices bursátiles no siguen una distribución normal.
- b) Conforme se alarga la periodicidad de las series (a meses), éstas tienden a la normalidad.

Nuestros resultados para los mercados europeos son coherentes con las conclusiones de las series americanas. Además de las conclusiones a) y b), concluimos que:

- c) Los rendimientos españoles se distribuyeron menos normalmente que los rendimientos americanos, a pesar de que para las series diarias no es así. Esto último se debe a la regulación a que ha estado sometido el mercado español; sin embargo, al ampliar la periodicidad de la serie este efecto desaparece.
- d) En las décadas de los ochenta y noventa, los rendimientos son, en general, normales, en contra de lo que ocurre cuando consideramos series más largas (1941-1990).
- e) Las empresas grandes convergen antes a la normalidad que sus respectivos índices, que incluyen empresas más pequeñas. Esto se refleja en una mayor normalidad de los índices ponderados frente a los simples.

En todos los casos, las series diarias son las que se apartan más de la distribución normal, mientras que las series semanales, mensuales y anuales se comportaron de forma más acorde con la normalidad. La no normalidad de las series se manifestó en las siguientes formas:

- a) Las series diarias tienen gran asimetría negativa y leptocurtosis, tanto para los diferentes mercados como para las empresas americanas –las españolas presentan asimetría positiva o son simétricas.
- b) Conforme se alarga la periodicidad de las series, la asimetría y la leptocurtosis desaparecen. Para las series anuales encontramos que la asimetría y la curtosis son estadísticamente insignificantes.

Hemos encontrado también una conexión entre normalidad y eficiencia débil, por cuanto los mercados y empresas que se apartan más de la normalidad son los que más ineficiencia débil presentan.

Normalidad de las rentabilidades bursátiles

Es esencial que un inversor conozca en detalle las características del mercado en que coloca su dinero. El inversor se interesa no sólo por el rendimiento de su cartera, sino también por la volatilidad de ese retorno, por la probabilidad de observar resultados extremos, etc. El inversor desearía conocer exactamente cuál es la función de distribución subyacente de sus rendimientos.

En la moderna teoría financiera se ha usado y se sigue usando intensivamente el supuesto de que la distribución de los rendimientos de los activos es normal. Este supuesto es tremendamente atractivo para los teóricos, ya que permite desarrollar modelos fáciles de tratar analíticamente.

Sin embargo, conocer cuál es la distribución de los rendimientos de los activos financieros cuenta con un aspecto que tiene especial incidencia en la práctica habitual de los inversores en los mercados de capitales: en base a qué *inputs* toman los inversores sus decisiones de inversión.

En 1952, Markowitz desarrolló el modelo media-varianza de elección de cartera. En definitiva, se trata de que el inversor racional y averso al riesgo seleccione carteras óptimas, es decir, que trate de maximizar el rendimiento esperado de su cartera, siendo éste

consistente con niveles individualmente aceptables de riesgo. Si las funciones de utilidad de los inversores son monótonas y estrictamente cóncavas, el inversor preferirá más rendimiento esperado y presentará aversión a la varianza. Sin embargo, estas propiedades tan intuitivas no garantizan que la elección de cartera, basada en el análisis media-varianza, le proporcione su utilidad esperada máxima¹. Para distribuciones de los rendimientos y funciones de utilidad arbitrarias, la utilidad esperada no puede definirse solamente sobre rendimientos esperados y varianzas, sino que, en general, hay que considerar momentos superiores.

Parece lógico pensar que los inversores que operan en el mundo real se sientan más atraídos por la idea de analizar la relación de intercambio entre riesgo y rendimiento a la hora de tomar sus decisiones, que por la de intentar formalizar sus funciones de utilidad y maximizar su valor esperado, lo cual no deja de implicar un difícil y dudoso resultado operativo. En definitiva, parece tremendamente atractiva la idea de que el inversor tome sus decisiones fijándose sólo en la media y en la varianza, pero que simultáneamente maximice su utilidad esperada. Sin embargo, ambos objetivos son sólo consistentes bajo ciertos supuestos.

En concreto, si sólo queremos mirar la media y la varianza y no queremos imponer ningún supuesto sobre la distribución de los rendimientos, es necesario que los inversores tengan una función de utilidad cuadrática. Desgraciadamente, la utilidad cuadrática presenta las indeseables propiedades de aversión absoluta al riesgo creciente y saciabilidad. Estas propiedades son claramente contra intuitivas, ya que la aversión absoluta al riesgo creciente significa que los activos arriesgados son bienes inferiores cuando es de esperar que los inversores los consideren como bienes normales; y la saciabilidad implica que a partir de un punto de saciedad, más riqueza reduce la utilidad del inversor.

Afortunadamente, el modelo media-varianza es válido para preferencias arbitrarias si suponemos que las tasas de rendimiento de los activos siguen una distribución normal multivariable².

Por último, hay otra razón para estudiar la normalidad de los rendimientos, quizá la más importante desde el punto de vista práctico, no tanto para los académicos, que lo es, sino para los inversores, y es que bajo el supuesto de normalidad tenemos a nuestro alcance toda la gama de herramientas estadísticas clásicas (mínimos cuadrados, estimación, contrastes de hipótesis...). El supuesto de normalidad simplifica tremendamente el análisis estadístico, que en otro caso se complicaría, llegando incluso a ser algunas de dichas herramientas inútiles si las distribuciones de los rendimientos fuesen de la familia de distribuciones estables no normales, por ejemplo³.

Una de las características de la distribución normal o de Gauss es que puede ser completamente descrita por dos parámetros, la media y la desviación estándar (o la varianza). Si la distribución no es normal, habrá que estudiar otras características de la misma, ya que para preferencias arbitrarias, en general, el inversor tendrá que considerar momentos superiores a la media y la varianza.

¹ Ayudándonos de una expansión de Taylor podemos expresar la utilidad esperada del inversor, y en ella aparecen como argumentos momentos de orden superior a dos. Por tanto, si no se pone ninguna condición sobre las preferencias o la distribución, el inversor, al maximizar su utilidad esperada, los está considerando.

² Esta es una condición suficiente pero no necesaria. La distribución lognormal también es descrita completamente por la media y la varianza, pero no es estable. Esto supone que una cartera compuesta por activos que se distribuyen como una lognormal multivariable no se distribuye como una lognormal.

³ Este tipo de distribuciones fueron propuestas por algunos autores, como más adelante veremos.

La simetría o asimetría son unas de las características que estudiaremos en nuestras series. Por asimetría entendemos que la probabilidad de observar un retorno a cierta distancia sobre la media no es la misma que la de encontrar ese resultado a la misma distancia por debajo de la media.

Además, estudiaremos la concentración de observaciones cerca de la media, esto es, la curtosis. Supongamos que tenemos dos series, A y B, con la misma volatilidad. A puede tener más observaciones cerca de la media (lo que la haría menos arriesgada que la serie B). Pero entonces esta serie ha de tener resultados muy extremos, más allá de los resultados extremos de B (lo que haría a la serie A más arriesgada que la B). Estamos aquí hablando de otro nivel de riesgo: el de obtener rentabilidades puntuales extremas, es decir, del riesgo de una caída importante en la rentabilidad bursátil. Aunque los rendimientos de las dos empresas tengan la misma volatilidad promedio, su comportamiento es bastante diferente.

La importancia de conocer estas características de la distribución son claras para un inversor. Un ejemplo típico: el 24 de octubre de 1987, el índice de la Bolsa de Madrid cayó un 9,73%, es decir, 8,49 desviaciones estándar debajo de la media. Si un inversor se dirigiera ingenuamente a un libro de estadística para calcular la probabilidad de que esto sucediera, diría que un resultado así ha de observarse cada 30.817.094 millones de años (es decir, nunca). Grande será su sorpresa al observar que un rendimiento tan bajo se dio solamente cuatro años después (el 20 de agosto de 1990).

El primer modelo de distribución de precios bursátiles se atribuye a Bachelier⁴ en 1900. Su trabajo pasó inadvertido en su momento, hasta que fue recuperado por Osborne (1959). Ambos autores suponen que las rentabilidades bursátiles son sucesos independientes obtenidos de la misma distribución de probabilidad. Suponen también que el número de transacciones se distribuye uniformemente a lo largo del tiempo. De este modo, las rentabilidades mensuales, por ejemplo, serán la suma de un conjunto de sucesos –rentabilidades diarias– independientes y procedentes de la misma distribución. Aplicando el teorema central del límite, sabemos que la suma de un conjunto de sucesos independientes, e idénticamente distribuidos, se aproxima a una distribución normal. Por tanto, las rentabilidades bursátiles, especialmente para períodos largos (meses, años), deben distribirse normalmente.

Mandelbrot (1964) fue el primero en cuestionar la hipótesis de normalidad de las rentabilidades bursátiles. De hecho, afirma que las rentabilidades son leptocúrticas, es decir, que hay mayor concentración de rendimientos alrededor de la media. Según Mandelbrot, las rentabilidades bursátiles seguirían una distribución estable no normal⁵. Como discute Cootner (1964), la propiedad de varianza infinita de estas distribuciones hace que muchas de las herramientas estadísticas que habitualmente utilizamos sean inservibles, lo que ilustra el elevado coste de rechazar la normalidad de los rendimientos.

Fama (1965) estudia la distribución de rentabilidades de las treinta empresas que componen el índice Dow Jones entre los años 1957 a 1962. Encuentra en las rentabilidades continuas diarias resultados muy parecidos a los de Mandelbrot (cierto grado de leptocurtosis); por tanto, no se distribuyen de una manera gaussiana. Posteriormente, Fama (1976) estudia rentabilidades mensuales simples de las treinta acciones del Dow Jones entre 1951 y 1968. Concluye que las rentabilidades mensuales son mucho más normales que las diarias –en contra de Mandelbrot. Todavía aprecia una cierta asimetría positiva y una cierta leptocurtosis, pero relativamente pequeñas. Fama, además, apunta que de usarse rendimientos continuos, en lugar de rendimientos simples como él utiliza, la asimetría hacia la derecha

⁴ Bachelier (1964). «Théorie de la speculation», Cauthier-Villars, París.

⁵ En esta línea están los estudios de Fama y Roll (1971).

desaparecería. Concluye, pues, que la hipótesis de normalidad de los rendimientos es razonable.

A las mismas conclusiones llegan Blume (1968) y Officer (1971) estudiando las rentabilidades de carteras compuestas por varias acciones. Concluyen que la hipótesis de la normalidad es razonable.

Metodología y datos

Un requisito para que exista normalidad multivariante es que todas las variables dependientes se ajusten a la distribución normal. Sin embargo, este requisito es condición necesaria pero no suficiente, ya que el hecho de que todas las variables se ajusten a la ley normal univariable no implica que todas ellas juntas sigan una distribución normal multivariable⁶. De aquí que si alguna variable presenta desviaciones respecto a la normalidad, se puede concluir que no se cumple este supuesto.

Nuestro objetivo aquí será contrastar la normalidad de las rentabilidades de índices de diversos mercados y algunas acciones de empresas americanas y españolas. De hecho, han sido y son numerosas las aplicaciones econométricas en que se supone directamente que el retorno del índice de mercado es normal.

Metodología

Para evaluar la normalidad de la distribución de los rendimientos utilizaremos diversos tests estadísticos. El primero se conoce como rango normalizado. Este consiste en dividir el rango (máximo menos mínimo) de una serie de las rentabilidades entre la desviación estándar de esa serie. Matemáticamente, esta fórmula está dada por Krishnaiah, 1980):

$$r_n = \frac{\max(x) - \min(x)}{\sigma_x} \quad (1)$$

Este estadístico tiene la singularidad de ser muy sensible a observaciones extremas. Si existe una observación muy alejada de la media, y aunque el resto de las observaciones se distribuyan normalmente, este test dirá que nos hemos encontrado con una distribución que no es normal.

Dado un valor del rango normalizado obtenido en (1), podemos ir a tablas especializadas⁷ a ver cuál es la probabilidad de que esta distribución provenga de una función gaussiana subyacente. Normalmente, los valores críticos con el que no se rechaza, al 95% de confianza, que la distribución es normal, varían entre 5,54 (para datos anuales) y 7,33 (para datos diarios) como límite superior, y 3,72 y 5,68, respectivamente, para el inferior.

El segundo test del que hacemos uso fue elaborado por Karl Pearson⁸ en 1900 y se le conoce como el test de la Chi-Cuadrado. La idea general de este test es ver si la

⁶ Existen diversas pruebas para comprobar el supuesto de normalidad multivariable. Las principales se pueden encontrar en Krishnaiah, P.R. (1973 y 1980).

⁷ Esta tabla se puede encontrar en David, H.A. et al. (1964).

⁸ Hogg, R. y J. Ledolter (1987), pág. 358.

divergencia entre las observaciones y lo predicho por una distribución difieren significativamente. El procedimiento para construir el estadístico es el siguiente:

- Se reparte el espacio muestral en “k” rangos y se determinan las frecuencias absolutas que corresponden a cada rango.
- Se calculan las probabilidades que la distribución normal asigna a las “k” clases. Con estas probabilidades obtenemos las frecuencias teóricas de cada rango multiplicando la probabilidad del rango por el número total de observaciones.

Con estos dos argumentos construimos el siguiente estadístico:

$$Q_{k-1} = \sum_{i=1}^k \frac{[Y_i - np_i]^2}{np_i} \quad (2)$$

donde Y_i es el número de observaciones en el rango i , n el número de observaciones totales y p_i la probabilidad que la distribución normal asigna al rango i .

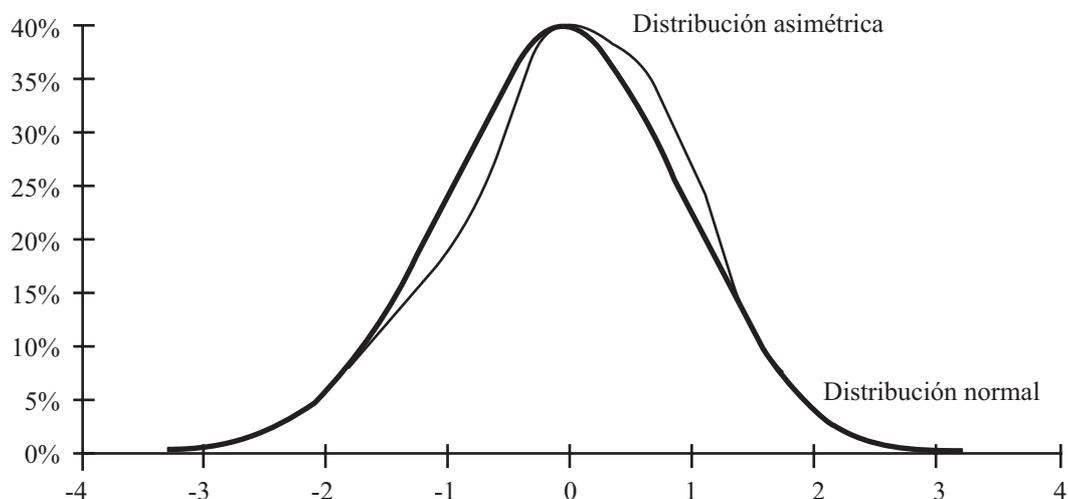
Si la muestra se ajusta a la distribución normal, se demuestra que el estadístico Q_{k-1} se distribuye como una χ^2_{k-1} , cuando el número de datos “n” tiende a infinito. Para que esta aproximación sea aceptable, se recomienda que la muestra sea mayor de 50.

El siguiente de los test que vamos a utilizar es un test de simetría. Definimos el valor típico de asimetría, B_1 , como el tercer momento centrado dividido entre la desviación estándar elevada al cubo:

$$B_1 = \frac{E([x_0 - E(x)]^3)}{\sigma_x^3} \quad (3)$$

Un coeficiente positivo de B_1 indica que hay cierta asimetría hacia la derecha. Esto quiere decir que la probabilidad de obtener un retorno por encima de la media es más probable que obtener un retorno por debajo de la media. Un coeficiente negativo indica que hay cierta asimetría hacia la izquierda. Se demuestra fácilmente que cuando la distribución de probabilidad de la variable es simétrica, los momentos centrados de orden impar son nulos cuando existen y, por tanto, el valor típico que hemos definido, B_1 , se anula. Dado que la distribución normal es simétrica, su valor típico de asimetría es cero.

Figura 1. Distribución asimétrica



Se debe notar que para que una serie sea asimétrica no es necesario observar muchos valores extremos. En la práctica, si existe un valor muy negativo, éste tendrá un gran peso en la ecuación (3), generando una serie asimétrica aunque el resto de los valores se ajusten a la distribución normal. El coeficiente muestral de simetría será:

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^3}{\hat{\sigma}^3} \quad (4)$$

donde $\hat{\mu}$ es la media muestral y $\hat{\sigma}^3$ es la desviación estándar muestral elevada al cubo. La distribución muestral de b_1 tiende rápidamente a una normal cuando aumenta el número de observaciones, siendo su media cero y su desviación estándar asintótica $\sqrt{\frac{6}{n}}$.

Para ver si la asimetría obtenida es estadísticamente significativa, construimos un estadístico “t de Student”: dividimos el valor típico muestral de simetría entre su error estándar. Si el cociente es mayor que dos, podemos rechazar la hipótesis nula de que la asimetría es cero.

Por último, realizaremos un test de curtosis. Definimos el valor típico de curtosis o deformación, B_2 , como el cuarto momento centrado dividido entre la desviación estándar elevada a la cuarta potencia:

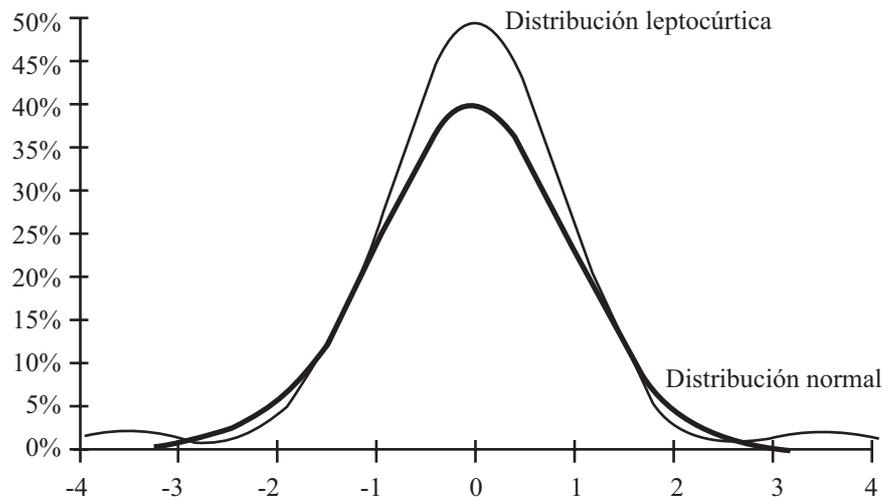
$$B_2 = \frac{E([x_0 - E(x)]^4)}{\sigma_x^4} \quad (5)$$

⁹ Krishnaiah, P.R. (1980).

Este parámetro mide el “apuntamiento” o “aplastamiento” de una distribución respecto a una distribución normal de igual varianza. En el caso de la distribución normal, el valor que toma B_2 es tres.

Un número superior a tres en el valor típico indica una serie “leptocúrtica” o más apuntada y con colas más altas. Con esto queremos decir que hay una gran concentración de observaciones cerca de la media, y también hay un gran número de observaciones extremas. Un valor inferior a tres indica que la serie es “platicúrtica”, es decir, una serie con una punta más “aplanada”.

Figura 2. Distribución leptocúrtica



Es importante notar que la leptocurtosis implica no sólo una serie más apuntada, sino que también implica colas más anchas. Esto significa que la probabilidad de obtener resultados muy lejos de la media es más común que lo pronosticado por una distribución normal. Este corolario se explica por el hecho de que estamos comparando la serie leptocúrtica con una normal de igual varianza. Si una serie leptocúrtica es más “apuntada” que la normal, esto implica necesariamente que debe de tener más observaciones lejos de la media para que en promedio tenga la misma varianza que una serie normal.

El coeficiente muestral será:

$$b_2 = \frac{\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^4}{\hat{\sigma}^4} \quad (6)$$

donde $\hat{\mu}$ es la media muestral y $\hat{\sigma}^4$ es la desviación estándar muestral elevada a la cuarta potencia. Bajo la hipótesis nula de normalidad, la distribución muestral de b_2 es muy asimétrica para $n = 100$ y normal para $n = 1.000$, con media tres y desviación estándar asintótica $\sqrt{\frac{24}{n}}$.

El test que aplicamos consiste en ver si el valor de curtosis es estadísticamente distinto de tres. Calculamos el test t: cociente del valor de curtosis menos 3 dividido entre el error estándar de b_2 . Si el resultado es superior a 2, podemos decir que la curtosis es estadísticamente significativa y, por tanto, no es mesocúrtica.

Alternativamente, podemos contrastar directamente la normalidad de las series a través de las distribuciones de b_1 y b_2 . Si los valores que obtengamos de b_1 y b_2 se apartan “significativamente” de cero y tres, respectivamente, podemos rechazar la hipótesis de normalidad. Afortunadamente, se pueden aproximar las distribuciones de b_1 y b_2 a través de curvas de Pearson y están tabulados los puntos de significatividad para el 5 y 10%¹⁰.

Datos

El estudio se refiere principalmente al mercado español, comparándolo sobre todo con el norteamericano, pero también con el francés, italiano, alemán e inglés. En cada país hemos tomado aquel mercado más representativo por volumen de negocio y capitalización (Madrid, Londres, París, Roma y Frankfurt). En el caso de Estados Unidos utilizamos un índice que recoge todos los mercados de dicho país. Hemos utilizado en diferente medida los datos de todos estos países que describimos a continuación:

España

Serie larga: abarca desde 1941 a 1990. Incluye dos índices:

- *Indice ponderado*: es el índice largo total de la Bolsa de Madrid. Se trata de un índice ponderado según la capitalización bursátil resultante el último día del año anterior; una vez fijada la ponderación de cada valor dentro del índice, ésta no varía durante todo el año; es lo que se conoce en la literatura técnica como *buy and hold*. Este índice representa el comportamiento del mercado en general y, especialmente, el de las empresas más grandes.
- *Indice simple*: construido dando la misma ponderación a los índices sectoriales que publica la Bolsa de Madrid. Carecemos en España de un índice oficial que recoja de alguna manera el comportamiento de las acciones pequeñas, por lo que hemos optado por la construcción de este índice a modo de aproximación.

Dentro de estos índices hemos elaborado series de rentabilidad mensual, trimestral, anual y de varios años.

Serie corta: abarca de 1985 a 1989 y pretende dar una visión más cercana de lo que está ocurriendo actualmente en el mercado. Comprende los siguientes índices:

- *Ponderado*: Índice General de la Bolsa de Madrid con base 100 el 31 de diciembre de 1985. Presenta las mismas características que el índice ponderado utilizado en la serie larga.
- *Simple*: Índice simple IESE. Se trata de un índice realizado con las 132 empresas más importantes del mercado español ponderadas de forma

¹⁰ Pearson, E.S. y H.O. Hartley (1972).

simple. Representa una aproximación al comportamiento de empresas pequeñas.

Para cada uno de estos índices hemos elaborado series de rentabilidad diaria, semanal y mensual.

Estados Unidos

Serie larga: 1941-1990. Con los siguientes índices:

- *Ponderado*: utilizamos el Value Weighted Index elaborado por el Center for Research of Security Prices de la Universidad de Chicago (abreviadamente, CRSP). Este índice recoge alrededor de 6.000 empresas, prácticamente la mayoría de las cotizadas, ponderadas por capitalización bursátil cada día; por tanto, el peso de cada valor en el índice varía diariamente (*rebalanced*). Este índice pretende representar todo el mercado.
- *Simple*: utiliza el Equally Weighted Index elaborado por el CRSP. Los 6.000 valores incluidos reciben igual ponderación en el índice, no importando el tamaño de la empresa. El índice pretende representar el comportamiento de las acciones pequeñas.

También, como para el caso de España, hemos elaborado en ambos índices rentabilidades mensuales, trimestrales y anuales.

Serie corta: abarca de 1985 a 1989.

Utilizamos los mismos índices simple y ponderado señalados anteriormente (CRSP). Hemos elaborado series de rentabilidad diaria, semanal y mensual.

Europa

Disponemos solamente de una serie larga, que abarca de 1970 a 1990, elaborada por Morgan Stanley Capital International (MSCI). El índice MSCI es un índice ponderado por capitalización y recoge para cada país sólo las empresas más grandes (entre 50 y 150 para cada mercado). No disponemos de índice simple ni de datos de periodicidad inferior a mensual. A partir de datos mensuales se han elaborado también series de rentabilidad trimestral y anual. Los índices vienen denominados en moneda local.

Definimos rentabilidad como el logaritmo natural del precio de un período (ajustado por dividendos y aumentos de capital) menos el logaritmo del precio del período anterior. Este tipo de retorno se conoce como rentabilidad continua.

$$R_{ct} = \text{Log} \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

En este estudio dividimos las series en dieciséis categorías. Para facilitar la comparación de las series se normalizaron los rendimientos. Utilizamos las siguientes series, indicadas en el Cuadro 1:

**Cuadro 1. Series de rentabilidades utilizadas.
Países y empresas**

País	Tipología	Periodicidad	Cobertura	Fuente	Código
Estados Unidos	Ponderada	Diaria Mensual	1985-1989 1941-1990	CRSP todas las series	euvwd euvwm
	Simple	Anual Diaria Mensual Anual	1941-1990 1985-1989 1941-1990 1941-1990		euvwa euewd euewm euewa
España	Ponderada	Diaria Mensual	1985-1989 1941-1990	Bolsa de Madrid	esvwd esvwm
	Simple	Anual Diaria Mensual Anual	1941-1990 1985-1989 1941-1990 1941-1990	IESE Banco de Madrid Banco de Madrid	esvwa esewd esewm esewa
Francia Alemania Italia Reino Unido	Ponderada (para todos)	Mensual y anual	70-90	MSCI	frvwm frvwa gevwm gevwa itvwm itvwa ukvwm ukvwa
Empresa	Tipología	Periodicidad	Cobertura	Fuente	Código
Banco Popular Banco Santander Iberduero Telefónica Hidroila AT&T IBM Kodak	Acciones “ “ “ “ “ “ “	Diaria Semanal Mensual (para todas las acciones)	1985-1989 (para todas)	Bolsa de Madrid “ “ “ CRSP “ “	bpod, s, m bsad, s, m ibdd, s, m teld, s, m hidd, s, m attd, s, m ibmd, s, m ekd, s, m

Resultados

Presentación de resultados

Los resultados del test de rangos normalizados se presentan en las Tablas 1 y 2. Los rangos normalizados en **negrita** significan que esa serie es estadísticamente distinta de la distribución normal al 95% de confianza. Hemos realizado un contraste bilateral, ya que queremos rechazar la hipótesis de normalidad no sólo para aquellas muestras cuyo rango es mayor que el que generalmente presenta la distribución normal, sino también aquellas cuyo rango es menor. En general, el problema que presentan la mayoría de las muestras es un rango mayor que el de la normal, para el intervalo de confianza que hemos exigido. Ha de notarse que una diferencia de dos puntos entre rangos es enorme, ya que estamos diciendo que una serie tiene un rango que es dos desviaciones estándar mayor que la otra. En las series para países se presentan también las series de Morgan Stanley para Estados Unidos y España (donde se añade el sufijo MSCI). Mostramos tales series para poder hacer

comparaciones con los otros mercados europeos, ya que las series son más homogéneas y cubren el mismo período.

Los resultados del test de la Chi-Cuadrado se presentan en las Tablas 3 y 4. La Tabla 3 muestra los resultados para los índices de cada país, con periodicidad mensual y diaria¹¹. La Tabla 4 presenta los resultados para las empresas, y se divide en series diarias y semanales. La primera columna de cada Tabla presenta los coeficientes Q de cada serie. Aquellas series que difieren significativamente de la distribución gaussiana están marcadas en negrita. En las siguientes columnas de las dos tablas se presenta el porcentaje de observaciones en un determinado rango. En la última fila de cada tabla aparece la distribución “pronosticada” de acuerdo a la distribución de Gauss.

Los resultados de los tests de asimetría y curtosis se presentan en las Tablas 5 y 6. La tercera y cuarta columnas recogen los valores típicos de asimetría y curtosis, respectivamente. Los valores en negrita significan que esa serie presenta unos valores de asimetría y curtosis estadísticamente distintos –a un nivel de significatividad del 90%¹²– de los de la distribución normal, que son cero y tres, respectivamente, y por tanto rechazamos la hipótesis de que la serie sea normal. Debemos llamar la atención sobre los valores típicos de curtosis para las series anuales de los índices de los países y las mensuales de las empresas: debido al reducido tamaño de las muestras no está tabulada la distribución, por lo que no es posible realizar el test y, por tanto, no se aplica la regla arriba indicada. Sin embargo, a pesar de que para estas series no podamos contrastar la hipótesis de normalidad, el valor típico en sí mismo tiene sentido, ya que nos informa de la curtosis de la muestra que estamos estudiando. La quinta columna muestra el número de observaciones en la serie. En las últimas dos columnas se presentan los tests “t” de asimetría y curtosis. Los coeficientes en negrita significan que esa serie es estadísticamente distinta de la distribución normal al 95% de confianza. De nuevo llamamos la atención sobre la validez del test de curtosis para las series anuales de los índices de los países y las mensuales de las empresas: el tamaño de las series es pequeño y el test “t” propuesto se basa en la normalidad asintótica del valor típico de curtosis.

Resultados diarios

Puede observarse, de acuerdo con el test de los rangos normalizados de la Tabla 1, que debemos rechazar la hipótesis de normalidad de los rendimientos diarios. Los valores que toman los estadísticos son siempre superiores a los pronosticados para una distribución normal, es decir, nuestras series diarias presentan resultados muy extremos. Dado que el test de los rangos normalizados es muy sensible a estos resultados extremos, podemos ver lo que ocurre con toda la distribución a través del test de la Chi-Cuadrado. De nuevo podemos observar en la Tabla 3 que los rendimientos diarios departen fuertemente de la normalidad. De hecho, si vamos a la Tabla 5 podemos comprobar cómo todas las series son asimétricas, presentando una clara asimetría negativa, es decir, los rendimientos por debajo de la media son más probables que los rendimientos por encima de ella. Además, todas las series son leptocúrticas.

Estas características de las series deben llamar la atención del inversor, ya que éste puede subestimar el nivel de riesgo de sus inversiones. A igual rendimiento esperado y varianza, la probabilidad de obtener un rendimiento cerca de la media es mayor que lo previsto por una distribución normal, pero también lo es la posibilidad de obtener un rendimiento muy negativo.

¹¹ No aparecen en la tabla los tests para series anuales, ya que la convergencia asintótica a la Chi-Cuadrado se suele considerar aceptable para un número de observaciones mayor que 50.

¹² Las distribuciones de estos valores se pueden encontrar en Hartley, H.O. y E.S. Pearson (1962).

Los mismos resultados se dan para las empresas americanas y españolas estudiadas. Debemos rechazar la hipótesis de que la distribución de rendimientos diarios de las empresas es normal (Tablas 2 y 4). También las empresas presentan una fuerte leptocurtosis; sin embargo, sólo las empresas americanas presentan asimetría negativa. Como puede comprobarse en la Tabla 6, las empresas españolas son simétricas o presentan asimetría positiva.

Estos resultados son coherentes con los que obtiene Fama (1976) para el mercado americano, excepto que él encuentra asimetría positiva. Nuestros resultados se justifican por el hecho de que la mayoría de las observaciones se encuentra por encima de la media, pero los valores muy extremos tienden a ser negativos. Como el coeficiente de asimetría es muy sensible a valores extremos, no es de extrañar que éste sea negativo para todas las series diarias y mensuales. Por otra parte, estos resultados no nos sorprenden demasiado, ya que era de esperar que los rendimientos continuos fuesen más negativos que los rendimientos simples. Fama (1976) había pronosticado que sus hallazgos en cuanto a asimetría desaparecerían cuando se usaran rentabilidades continuas. No sólo desapareció esta asimetría positiva, sino que también apareció una negativa.

Por otro lado, y atendiendo al test de rangos normalizados, hay que destacar que las series americanas se alejan más de una distribución normal que sus homólogas españolas. La explicación de este resultado tiene que ver con el hecho de que los precios en el mercado español han estado regulados en cuanto a la caída máxima permitida en un mismo día, lo que hace que las rentabilidades españolas se manifiesten menos violentamente que los rendimientos americanos. Dado que el test del rango normalizado es muy sensible a valores extremos (ya que sólo considera los valores mínimos y máximos de las series), esto hace que los rendimientos americanos diarios aparezcan mucho más alejados de la normalidad que los españoles. Contrástese, por ejemplo, el comportamiento del mercado americano y el español en octubre de 1987: el lunes 19 de ese mes el índice americano cayó cerca del 20%. Al día siguiente (cuando ya se conocía el desplome en Nueva York), el mercado español cayó solamente el 5%, que era la caída máxima permitida por aquel entonces. El mercado estadounidense se estabilizó esa semana, en tanto que la bolsa española se fue desplomando diariamente, cayendo un 5% cada día y un 10% cuando se modificaron las restricciones a ese nivel.

Es más, si comparamos el valor de los estadísticos, para todos los tests realizados con índices diarios, comprobamos que sistemáticamente las series americanas presentan valores considerablemente mayores que los de las españolas. Las series americanas son más asimétricas que sus homólogas españolas. Para la serie americana ponderada, el valor típico de asimetría es de -5,24, mientras que para España es de -0,53. Esto se debe, ante todo, a que el mercado americano presenta observaciones que se encuentran muy por debajo de la media (como el 19 de octubre de 1987), mientras que España no tiene tantas observaciones “muy” negativas. Ya que normalmente la causa de la asimetría es que las caídas porcentuales son mucho más fuertes que las alzas, las series españolas se manifiestan menos asimétricas que los rendimientos americanos debido a su regulación en cuanto a la caída máxima permitida en un mismo día. Esto explica también la gran leptocurtosis de las series americanas.

Lo mismo se puede decir para las empresas, ya que el mercado español también regula el movimiento de los valores particulares. Aunque no se puede afirmar que las empresas americanas presentan mayores estadísticos para el test de la Chi-Cuadrado, ya que las diferencias no son claras, el resto de los tests nos presenta el resultado antes apuntado. Las series americanas presentan resultados más extremos, son más asimétricas y leptocurtias que las españolas.

Las cotizaciones pueden estar reguladas por el mercado o por la propia empresa, que intenta limitar las oscilaciones bruscas. Se sabe, por ejemplo, que las acciones bancarias españolas han estado mucho más reguladas que otras acciones. Consecuentemente, se puede ver que el rango normalizado de los bancos para datos diarios es mucho menor que el de otras acciones, y sus rendimientos son simétricos. La falta de regulaciones también explica por qué las grandes empresas americanas tienen un rango normalizado gigantesco para las series diarias, dándoles apariencia de no normalidad¹³.

Otro factor que puede afectar a la normalidad de un índice o una empresa es el número de participantes en cada mercado. Si hay muchos participantes para las acciones de una empresa o de un mercado, esto da pie a una gama más amplia en cuanto a ofertas y demandas. Esto puede explicar la enormidad de los rangos normalizados americanos en las series diarias. Este factor también puede explicar por qué una empresa como Telefónica tiene un rango normalizado tan alto (relativo a las otras empresas españolas). Dado que el mercado de Telefónica tiene más participantes que el mercado para otras acciones más pequeñas, sería de esperar que hubiera una gama más amplia de resultados para esa empresa.

Las empresas presentan estadísticos más reducidos que el de sus mercados respectivos –medidos por el índice ponderado–, para todos los tests. Dado que las empresas estudiadas son de gran tamaño, esto nos induce a pensar que puede darse un “efecto tamaño” que debería manifestarse en diferencias entre los índices simples y ponderados. Se puede comprobar que el índice simple, tanto americano como español, se aparta más de la normalidad que el ponderado para el test de la Chi-Cuadrado, y lo mismo ocurre para el caso americano con el test de rangos (en el español las diferencias son pequeñas). Sin embargo, no podemos llegar a ninguna conclusión general si nos fijamos en los test de simetría y curtosis, ya que aunque el índice ponderado español es menos leptocúrtico y asimétrico que el simple, esto no sucede para el caso americano. Volveremos sobre este punto en los siguientes apartados.

Resultados semanales

Los resultados semanales sólo se calcularon para las series de empresas americanas y españolas. De nuevo debemos rechazar la hipótesis de ajuste a una distribución normal de las empresas tanto españolas como americanas. Según el test de la Chi-Cuadrado (Tabla 4), ninguna empresa supera el test; sin embargo, las empresas americanas están muy cerca del valor crítico. De hecho, ATT, por ejemplo, supera el test de los rangos, el de simetría y el de curtosis. Como vemos, ahora las empresas americanas presentan claramente menores estadísticos que las españolas, cuando para series diarias ocurría lo contrario. Si consideramos el test del rango normalizado, de nuevo son las empresas americanas las que presentan menores estadísticos, llegando a superar el test dos de ellas, lo que difiere significativamente de los resultados para datos diarios y, de hecho, este nuevo resultado se verá reforzado a medida que amplíemos la periodicidad de las series, como luego veremos.

Curiosamente, la asimetría de las empresas españolas aumentó, haciéndose en general más positiva. Para las series americanas, la asimetría se reduce drásticamente, aunque persiste una leve asimetría negativa. Esto significa que las empresas españolas, dados un mismo retorno y una misma volatilidad, son más atractivas que las acciones americanas. Donde se observa un cambio más espectacular es en la curtosis, pues aunque

¹³ Recordamos que las series diarias abarcan sólo el período 1985-1989, justo antes de que entrara en vigor la liberación del mercado bursátil y la puesta en marcha del mercado continuo.

persiste cierta leptocurtosis, ésta disminuye sensiblemente respecto a las series diarias, sobre todo para el caso de las empresas americanas.

En general, y comparando serie por serie, los valores de los estadísticos se han reducido y están más próximos al límite de aceptación de la hipótesis de normalidad de lo que lo estaban para el caso de series diarias.

Resultados mensuales

Rechazamos la hipótesis de que las series mensuales de los países se ajusten a una distribución normal excepto para el caso de Italia. Sin embargo, vemos cómo los valores de los estadísticos se reducen sensiblemente respecto al análisis diario. Los rangos normalizados siguen siendo mayores de lo pronosticado para una distribución normal, aunque no se alejen tanto como ocurría con las series diarias. A pesar de que se ha reducido la asimetría, ésta persiste y fue en general negativa, con la excepción del mercado inglés. Las series de los países siguen siendo leptocúrticas a pesar de que se ha reducido considerablemente el valor de curtosis respecto a las series diarias. El índice español se encuentra entre los más leptocúrticos de los estudiados.

Las fuentes de no normalidad de las series españolas mensuales provienen de la gran concentración de observaciones cerca de la media. España es además el país con más valores extremos de todas las series. Para el índice ponderado, se da una observación más allá de 3,5 desviaciones estándar de la media cada siete años, mientras que lo esperado es observar un resultado así una vez cada 208 años. Esto quiere decir que para un nivel dado de riesgo " σ ", por lo general los inversores españoles tendrán más riesgo debido a que los fuertes descensos bursátiles son más probables.

Los rendimientos españoles presentan mayores rangos que los americanos, comparando serie por serie mensual, a diferencia de lo que ocurría con series diarias. Recordemos que este cambio ya se daba para las empresas al pasar de series diarias a semanales. Ahora, las series españolas son más asimétricas y leptocúrticas que las americanas. En definitiva, estamos comprobando cómo la aparente "mayor normalidad" de las series españolas respecto a las americanas en el análisis diario era consecuencia de la regulación a que estaba sometido el mercado español. Las restricciones en cuanto a movimientos máximos eran limitaciones en cuanto a caídas o alzas diarias y no semanales o mensuales. En definitiva, el resultado para las series diarias era espúreo, y a medida que ampliamos la periodicidad de las series se confirma cómo un mercado como el americano, con mayor volumen y frecuencia de contratación, converge más rápidamente a la normalidad.

Las diferencias en los rendimientos extremos se han reducido en los últimos años, tanto para Estados Unidos como para España. Hemos comparado los rangos de cada serie para diferentes subperíodos, y en el período 1980-1990 obtenemos unos rangos inferiores a los encontrados para 1941-1990.

Lo anterior se puede confirmar también al comparar el rango del índice ponderado (1941-1990) y del índice de Morgan Stanley (1970-1990) en la Tabla 1. Para Estados Unidos, el rango del índice con comienzo en 1941 es de 9,57, mientras que el índice de MSCI da un valor de 8,59. Para España, esos coeficientes son 10,65 y 9,03, respectivamente. Esto se debe quizás al aumento del volumen y frecuencia de negociación en los últimos años. Hacemos notar de todos modos que el índice MSCI, al estar compuesto por menos empresas y más grandes, tendrá habitualmente un comportamiento más próximo

a la normalidad que los índices generales utilizados para los mercados españoles y norteamericano.

La misma conclusión se tiene si atendemos al test de la Chi-Cuadrado, comparando el valor de Q del índice ponderado (1941-1990) y del índice de Morgan Stanley (1970-1990) en la Tabla 3. Para Estados Unidos, el valor del estadístico Q con comienzo en 1941 es de 36,78, mientras que el índice de MSCI da un valor de 34,5. Para España, esos coeficientes son 75,79 y 64,04, respectivamente.

En cuanto a las empresas, podemos decir que no existe incompatibilidad de tipo estadístico para aceptar que los rendimientos de las empresas americanas estudiadas se ajustan a una distribución normal, así como una de las españolas, Iberduero. Además, aquellas para las que se rechaza la hipótesis de normalidad presentan unos rangos mucho menores que con series diarias o semanales. Sólo son tres de las ocho empresas las que presentan asimetría, de las cuales dos presentan asimetría positiva. Recordamos que los resultados del test de curtosis en este apartado tienen escasa relevancia para las empresas. Sin embargo, fijándonos en los valores típicos de curtosis, vemos que éstos se han reducido respecto a los de las series semanales, acercándonos más al valor tres.

Entre las empresas españolas no se nota ninguna diferencia en el rango normalizado o en el test de la Chi-Cuadrado. Esto, junto con los resultados para datos semanales, nos lleva a concluir que los menores rangos de los bancos en las series diarias eran artificiales, causados por la gran regulación a que estaban sometidos estos valores.

De nuevo podemos observar que las empresas se comportan de forma más acorde con la normalidad que sus respectivos mercados, son más simétricas y mesocúrticas. Si la razón para ello es que las empresas grandes, como las estudiadas, se comportan más normalmente, esto debiera reflejarse en una mayor normalidad de los índices ponderados respecto de los simples. Según el test de la Chi-Cuadrado (Tabla 3), para el caso español las diferencias son pequeñas, pero el estadístico de la serie ponderada americana es sensiblemente menor que el del índice simple. De hecho, los datos de índices simples presentan mayores rangos que aquellos de índice ponderado (Tabla 1). En el caso de Estados Unidos, el rango del índice ponderado es de 9,57, en tanto que el mismo rango del índice simple es 11,07. Para España, el rango del índice ponderado es de 10,65, en tanto que el rango del índice simple es 11,59. Esto sugiere que efectivamente existe un “efecto tamaño” que se puede observar en series mensuales. Dado que los índices ponderados reflejan los rendimientos de empresas grandes, concluimos que éstas han de tener un comportamiento en sus valores extremos más acorde con la normalidad que el de empresas pequeñas, reflejadas en el índice simple de Estados Unidos y España. El “efecto tamaño” nos dirá que una empresa grande tiene más volumen y frecuencia de transacción, lo que aceleraría una convergencia hacia una distribución normal.

En el caso de España, el índice simple es más asimétrico que el ponderado, aunque esto no se repite para el americano. Sin embargo, los índices simples tuvieron más leptocurtosis que los ponderados tanto para resultados americanos como para españoles, de lo que se sigue que las empresas pequeñas (representadas por el índice simple) pueden ser más leptocúrticas que las empresas grandes.

Por último, puede ser de interés para el inversor tener información sobre el número de observaciones por encima o por debajo de la media. Encontramos que las series de España están levemente sesgadas hacia los rendimientos por debajo de la media (53% por debajo de la media). Para Estados Unidos esto es al revés, ya que el 53% de las observaciones se encuentran por encima de la media. De los datos mensuales sólo España tuvo más observaciones debajo de la media, como se puede ver en el Cuadro 2.

Cuadro 2. Porcentaje de observaciones por debajo y por encima de la media

País y período	Código	Observaciones debajo del promedio	Observaciones encima del promedio
Diarias			
España	esvwd	53,08%	46,92%
España/simple	esewd	54,13%	45,87%
Estados Unidos	euvwd	46,27%	53,72%
Estados Unidos/simple	euewd	45,56%	54,44%
Mensuales			
Francia	frvwm	49,60%	50,40%
Alemania	gevwm	46,83%	53,17%
Italia	itvwm	48,41%	51,59%
Reino Unido	ukvwm	45,63%	54,37%
España/simple	esvwm	50,00%	50,00%
España/simple	esewm	51,00%	49,00%
Estados Unidos	euvwm	47,50%	52,50%
Estados Unidos/simple	euewm	47,66%	52,33%

Resultados anuales

Estos resultados sólo se mostraron para las series de países, dado el limitado número de observaciones en el caso de las empresas. Todas las series anuales superan el test de normalidad del rango normalizado, excepto la inglesa y la italiana; la inglesa, por exceso, y la italiana, por presentar un rango muy pequeño (Tabla 1). Como muestra la Tabla 5, todas las series son simétricas y mesocúrticas, a excepción de Reino Unido, que sigue siendo levemente leptocúrtica. Por tanto, no hay evidencia para rechazar la hipótesis de normalidad en la mayoría de los mercados estudiados.

Requiere nuestra atención el hecho de que a medida que hemos ampliado la periodicidad de las series –de diarias a semanales, mensuales y anuales–, se han ido reduciendo los estadísticos y podemos aceptar que las series de los rendimientos anuales se distribuyen normalmente. Esto es coherente con el teorema central del límite: aunque la distribución original de la rentabilidad diaria no es normal, su suma tiende a la normalidad y se torna normal después de un número de iteraciones. Además, las empresas grandes, con mayor volumen y frecuencia de contratación, convergen antes a la normalidad.

Al igual que ocurría con las series mensuales, las diferencias entre los rendimientos extremos se han reducido en los últimos años. Como en el caso de los rendimientos mensuales, hemos comparado los rangos del mercado español y americano para 1980-1990, y son menores que los de 1941-1990. Además, esto se puede confirmar al comparar el rango del índice ponderado (1941-1990) y del índice de Morgan Stanley (1970-1990) en la Tabla 1. Para Estados Unidos, el rango del índice con comienzo en 1941 es de 4,7, mientras que el índice de MSCI da un valor de 3,95. Para España, esos coeficientes son 4,97 y 3,98, respectivamente. Como antes apuntábamos, esto quizá se debe al aceleramiento del volumen y frecuencia de transacción en los últimos años.

Apuntamos algunos factores que pudieran afectar a la normalidad de las series y explicar los resultados obtenidos; son hipótesis para futuras investigaciones:

- a) Reglamentaciones y restricciones sobre movimiento de los precios. Cuantas más restricciones existan, se observarán rendimientos menos “extremos”, especialmente en series diarias. Un análisis somero de los países nos llevaría a concluir (erróneamente) que el país con más restricciones tiene una distribución más próxima a la normal.
- b) El volumen de contratación y frecuencia de transacciones. Aunque los resultados diarios no se parecen a la función gaussiana, sabemos que gracias al teorema central del límite, conforme las acciones se negocien más frecuentemente nos acercaremos a la normalidad. Para la serie americana, que tiene gran volumen de transacción todos los días, las series mensuales serán más normales que los rendimientos españoles, dado que de hecho incluyen más transacciones de cada acción por mes que sus homólogas españolas.
- c) El número de participantes en el mercado bursátil. Dado un mismo volumen y un mismo conjunto de reglamentos, un mercado con más participantes tendrá en el largo plazo una distribución más normal. Esto se debe a que cuantos más participantes haya, habrá más gama en cuanto a ofertas y demandas. Esta gama, al sumarse a través de los días, produce una distribución más normal. Consideremos por ejemplo el mercado alemán: aunque éste tenga más volumen que el mercado español, su número de participantes (relativo al volumen) es menor que en España. Una consecuencia de esto es que el mercado alemán presenta un estadístico Q mayor que el español (Tabla 3) para datos mensuales, es decir, se aleja más de la normalidad.

Otro ejemplo de cómo estos tres factores se conjugan es el caso de Francia y España. Ambos países han tenido reglamentos similares y un cociente participantes-volumen parecido. Una consecuencia lógica es la similitud de la distribución entre ambos países. Francia obtuvo un 77 en el test de Chi-Cuadrado, en tanto que España obtuvo un 76 en el mismo test para series mensuales (Tabla 3).

Por último, apuntamos el hecho de que parece existir una estrecha relación *de facto* entre normalidad y eficiencia, al menos en su forma débil¹⁴. Utilizando las mismas series, hemos encontrado que aquellas que se alejan más de la normalidad son las que presentan más ineficiencia débil.

En concreto, los factores que identificamos como posible causa de no normalidad se dan también en aquellos mercados que son menos eficientes:

- Tamaño: volumen y frecuencia de contratación.
- Regulaciones.
- Pluralidad de participantes.

Cuanto más pequeño es el mercado, más parece alejarse de la normalidad y de la eficiencia.

No hemos encontrado ninguna conexión teórica que justifique este paralelismo entre normalidad y eficiencia, pero ciertamente parece un tema que justifique posteriores estudios.

¹⁴ Martínez Abascal, Eduardo (1992).

Conclusiones

En este trabajo estudiamos la distribución de los rendimientos de series diarias, semanales, mensuales y anuales. Utilizamos series para empresas americanas y españolas (1985-1989), series diarias americanas y españolas (1985-1989), y series mensuales y anuales de estos países (1941-1990). También hemos hecho uso de resultados mensuales y anuales de otros mercados europeos (francés, alemán, italiano e inglés).

Hemos evaluado si estas series se comportan de acuerdo a una distribución gaussiana usando cuatro test: el primero se conoce como rango normalizado, y el segundo como el test de la Chi-Cuadrado; los dos últimos tests son los de simetría y curtosis.

En este estudio encontramos que las series diarias no son normales. En general, estas series son asimétricas y leptocúrticas. Conforme alargamos la periodicidad de las series se tiende a la normalidad. De hecho, las rentabilidades anuales no presentan ni asimetría ni leptocurtosis, y su comportamiento sigue el de una distribución normal en todos los países, excepto en Reino Unido. Este resultado es coherente con el teorema central del límite.

Las series diarias presentan asimetría negativa, especialmente en el caso del mercado norteamericano, y son además leptocúrticas. Para el inversor, estas conclusiones son de interés, pues podría subestimar el riesgo de sus inversiones, ya que la probabilidad de que observe un retorno muy negativo es más alta de lo previsto. Para las empresas españolas, la asimetría diaria es en algunos casos positiva.

Las distribuciones (al menos la americana y española) se han vuelto más normales en los últimos años. Llegamos a esta conclusión comparando el valor de los diversos tests para las mismas series en distintos años.

Las series americanas (en índices y empresas) se comportaron más normalmente que las series españolas. Sin embargo, para datos diarios las series americanas fueron más asimétricas y leptocúrticas, y sus rangos mucho mayores que los de las series españolas. Por el contrario, en rentabilidades semanales, mensuales y anuales, el mercado norteamericano casi no sufrió de asimetría ni de leptocurtosis. Esto se puede deber, en parte, a las restricciones a movimientos diarios en los precios existentes en el mercado español.

Las grandes empresas se comportaron más normalmente que sus respectivos mercados, medidos por un índice ponderado. Esto se debe a que el índice total de los países contiene observaciones de empresas pequeñas que se negocian infrecuentemente. Esto se refleja en una mayor normalidad de los índices ponderados frente a los simples.

En España, los rendimientos de los bancos fueron menos asimétricos y leptocúrticos y con menores rangos que los resultados de otras compañías españolas. Este fenómeno desapareció para series semanales y mensuales. Esto se puede deber al control que los bancos han podido ejercer en el movimiento diario de sus acciones. Este control no es posible para períodos más largos (meses o años).

Como resumen, diremos que la normalidad de las series depende del volumen y frecuencia de contratación, así como de las regulaciones sobre los movimientos de los precios.

Hemos apuntado, por último, la conexión de hecho existente entre normalidad y eficiencia débil. Los mercados y empresas que se alejan más de la normalidad son los que presentan mayor ineficiencia débil.

Con este trabajo hemos pretendido una primera aproximación al problema de conocer si la distribución de las rentabilidades se ajusta a una distribución normal. Dada la relevancia del tema para los inversores, sería interesante ampliar el estudio a un mayor número de empresas españolas, así como realizar otros tests de normalidad que consideren aspectos de la distribución a los que no son sensibles los aquí presentados, como puede ser el de Kolmogorov. Más interesante aún sería realizar un test sobre la posibilidad de que los rendimientos anuales de las acciones se distribuyan según una distribución normal multivariable.

Tabla 1. Rangos normalizados para series de diversa periodicidad

País Series diarias	Código	Promedio	Mínimo	Máximo	Desviación estándar	Obs.	Rango normalizado*
Estados Unidos	euvwd	0,070%	-19,902%	8,483%	1,098%	1.262	25,851
Estados Unidos simple	euewd	0,071%	-15,299%	9,380%	0,890%	1.262	27,722
España	esvwd	0,112%	-9,734%	6,939%	1,160%	1.234	14,371
España simple	esewd	0,146%	-10,281%	6,439%	1,216%	1.234	13,755
Series mensuales							
Francia	frvwm	0,941%	-24,619%	20,889%	6,310%	252	7,212
Alemania	gevwmm	0,593%	-25,730%	15,548%	5,361%	252	7,700
Italia	itvwm	0,751%	-20,234%	24,219%	7,099%	252	6,262
Reino Unido	ukvwm	1,141%	-30,017%	43,495%	6,756%	252	10,881
España	esvwrn	0,949%	-32,149%	21,252%	5,014%	600	10,650
España (MSCI)	esvwm(MSCI)	0,802%	-29,133%	23,859%	5,871%	252	9,026
España simple	esewm	0,913%	-38,809%	18,586%	4,953%	600	11,588
Estados Unidos	euvwm	0,928%	-24,653%	15,272%	4,173%	600	9,567
Estados Unidos (MSCI)	euvwm(MSCI)	0,798%	-23,855%	16,374%	4,683%	252	8,591
Estados Unidos simple	leuewm	1,128%	-31,191%	28,768%	5,418%	600	11,066
Series anuales							
Francia	frvwa	11,287%	-34,943%	49,810%	26,266%	21	3,227
Alemania	gevwwa	7,119%	-48,467%	61,416%	24,812%	21	4,429
Italia	itvwa	9,017%	-37,887%	73,627%	40,748%	21	2,737
Reino Unido	ukvwa	13,687%	-71,690%	91,924%	30,224%	21	5,413
España	esvwa	11,389%	-33,325%	76,963%	22,200%	50	4,968
España (MSCI)	esvwa(MSCI)	9,629%	-31,583%	64,976%	24,251%	21	3,982
España simple	esewa	10,950%	-36,436%	74,159%	23,384%	50	4,730
Estados Unidos	euvwa	11,134%	-31,790%	40,717%	15,414%	50	4,704
Estados Unidos (MSCI)	euvwa(MSCI)	9,574%	-32,398%	30,615%	15,967%	21	3,946
Estados Unidos simple	euewa	13,533%	-42,810%	57,346%	22,992%	50	4,356

* Los coeficientes en negrita no superan el test bilateral al 95% de confianza. La Tabla de la distribución de este estadístico se puede encontrar en David, H.A. y E.S. Pearson, «The Distribution of the Ratio, in a Single Normal Sample, of the Range to Standard Deviation», *Biometrika*, 61, pág. 491, 1964.

Tabla 2. Rangos normalizados para series de empresas americanas y españolas, 1985-1989

Series diarias	Código	Promedio	Mínimo	Máximo	Desviación estándar	Obs.	Rango normalizado*
Banco Popular	bpod	0,150%	-10,265%	7,796%	1,812%	1.234	9,966
Banco Santander	bsad	0,133%	-5,593%	4,832%	1,073%	1.234	9,720
Iberduero	ibdd	0,081%	-10,710%	18,058%	2,316%	1.234	12,422
Telefónica	teld	0,079%	-13,679%	18,361%	2,036%	1.234	15,736
Hidroila	hidd	0,068%	-10,668%	18,673%	2,382%	1.234	12,319
ATT	attd	0,084%	-23,889%	15,188%	1,806%	1.263	21,637
IBM	ibmd	-0,007%	-26,088%	10,054%	1,538%	1.263	23,504
Eastman Kodak	lekd	0,037%	-36,005%	21,556%	2,041%	1.263	28,209
Series semanales							
Banco Popular	bpod	0,689%	-13,459%	18,346%	4,675%	260	6,803
Banco Santander	bsas	0,624%	-11,123%	16,990%	3,069%	260	9,162
Iberduero	ibds	0,361%	-14,751%	21,072%	5,173%	260	6,925
Telefónica	tels	0,358%	-25,463%	18,673%	4,428%	260	9,968
Hidroila	hids	0,307%	-16,846%	21,143%	5,032%	260	7,550
ATT	atts	0,378%	-11,848%	10,197%	3,353%	260	6,575
IBM	ibms	-0,035%	-11,155%	7,938%	2,739%	260	6,971
Eastman Kodak	leks	0,188%	-12,161%	11,166%	3,510%	260	6,646
Series mensuales							
Banco Popular	bpom	2,956%	-30,538%	32,036%	10,275%	60	6,090
Banco Santander	bsam	2,694%	-17,140%	27,104%	7,290%	60	6,069
Iberduero	ibdm	1,345%	-20,679%	21,791%	8,051%	60	5,275
Telefónica	telm	1,135%	-35,247%	21,532%	8,748%	60	6,490
Hidroila	hidrn	1,153%	-18,711%	33,881%	9,177%	60	5,731
ATT	atmm	1,781%	-15,665%	14,904%	6,886%	60	4,439
IBM	ibmm	-0,154%	-20,751%	12,418%	6,474%	60	5,123
Eastman Kodak	lekm	0,748%	-19,878%	15,873%	7,040%	60	5,079

* Los coeficientes en negrita no superan el test bilateral al 95% de confianza. La tabla de la distribución de este estadístico se puede encontrar en David, H.A. y E.S, Pearson, «The Distribution of the Ratio, in a Single Normal Sample, of the Range to Standard Deviation», *Biometrika*, 61, 1964, pág. 61.

Tabla 3. Test del Chi-Cuadrado para series mensuales y diarias

		Rangos (en desviaciones estándar)																			Obs	
		-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	Obs					
Serías mensuales		Distribución porcentual																				
De	Código	Q*																				
a																						
	Francia	77,38	0,79%	0,40%	0,00%	1,19%	2,78%	9,13%	15,48%	19,84%	17,46%	19,05%	9,92%	2,38%	0,40%	0,79%	0,00%	252				
	Alemania	92,28	0,79%	0,79%	0,00%	1,19%	1,59%	8,73%	11,90%	21,83%	25,79%	13,89%	7,94%	2,78%	2,38%	0,00%	0,00%	252				
	Italia	11,48	0,00%	0,00%	0,79%	1,59%	3,97%	7,94%	15,87%	18,25%	21,43%	17,86%	7,54%	1,98%	0,79%	1,19%	0,79%	252				
	Reino Unido	42,53	0,40%	0,40%	0,79%	1,19%	3,57%	5,56%	14,29%	19,44%	28,97%	15,48%	6,35%	1,98%	0,79%	0,40%	0,40%	252				
	España	75,79	0,79%	0,00%	0,00%	1,98%	2,38%	6,75%	15,87%	20,24%	22,22%	17,06%	7,94%	2,38%	1,19%	0,79%	0,00%	600				
	España (MSCI)	64,04	0,33%	0,00%	1,00%	1,00%	3,00%	7,17%	13,17%	24,33%	24,17%	13,33%	5,83%	3,83%	0,33%	0,33%	252					
	España simple	72,77	0,33%	0,00%	0,83%	0,83%	2,83%	6,83%	14,00%	25,33%	24,50%	10,83%	8,17%	2,33%	1,50%	0,67%	600					
	Estados Unidos	36,78	0,40%	0,00%	0,79%	2,78%	1,98%	5,95%	14,68%	24,21%	18,25%	18,65%	7,94%	1,59%	2,38%	0,40%	600					
	Estados Unidos (MSCI)	34,50	0,17%	0,50%	0,50%	1,50%	3,83%	7,67%	14,17%	19,17%	20,67%	18,33%	10,17%	1,83%	0,67%	0,17%	252					
	Estados Unidos simple	77,33	0,50%	0,33%	0,17%	1,17%	3,83%	7,67%	13,17%	20,83%	23,17%	16,17%	8,00%	3,17%	1,17%	0,33%	600					
Serías diarias																						
	España	416,10	0,65%	0,49%	0,41%	1,13%	1,94%	5,02%	12,24%	31,20%	24,31%	11,10%	5,75%	3,08%	0,41%	0,57%	0,32%	1.234				
	España simple	794,04	1,05%	0,16%	0,49%	0,65%	1,38%	4,78%	12,48%	33,14%	22,85%	11,51%	6,24%	2,67%	1,30%	0,24%	0,49%	1.234				
	Estados Unidos	556,94	0,71%	0,00%	0,16%	0,87%	1,82%	3,96%	10,54%	28,21%	31,85%	14,03%	4,52%	2,38%	0,55%	0,08%	0,16%	1.263				
	Estados Unidos simple	708,33	0,71%	0,00%	0,24%	0,63%	1,74%	2,54%	10,22%	29,48%	35,42%	13,55%	3,88%	0,87%	0,32%	0,08%	0,32%	1.263				
	Pronóstico normal		0,02%	0,11%	0,49%	1,65%	4,41%	9,18%	14,99%	19,15%	19,15%	14,99%	9,18%	4,41%	1,65%	0,49%	0,11%	0,02%				

* Los valores en negrita no superan el test. El valor crítico para aceptar la hipótesis de normalidad al 95% de confianza es $Q \leq 25$.

**Tabla 4. Test del Chi-Cuadrado para series mensuales y diarias.
Empresas americanas y españolas**

		Rangos (en desviaciones estándar)													Obs			
		-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5		
De		-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5		
a		-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5		
	Series diarias	Distribución porcentual																
	Código	Q*																
	Banco Popular	0,16%	0,16%	1,86%	1,54%	2,19%	4,70%	9,08%	45,54%	13,45%	9,16%	3,65%	3,57%	3,32%	1,38%	0,00%	0,24%	1.234
	Banco Santander	0,89%	0,08%	0,65%	0,89%	2,43%	3,65%	9,97%	44,08%	17,99%	8,83%	4,46%	2,43%	1,70%	0,49%	0,57%	0,89%	1.234
	Iberduero	0,24%	0,00%	0,08%	3,16%	2,51%	6,40%	13,29%	26,82%	23,26%	11,10%	5,75%	2,67%	4,29%	0,08%	0,08%	0,24%	1.234
	Telefónica	0,65%	0,00%	0,73%	0,49%	1,62%	5,75%	11,67%	34,04%	23,91%	10,62%	5,35%	2,19%	2,11%	0,32%	0,08%	0,49%	1.234
	Hidroila	0,24%	0,08%	0,32%	2,84%	2,27%	5,59%	15,96%	24,72%	22,12%	12,48%	6,65%	2,92%	3,24%	0,24%	0,08%	0,24%	1.234
	ATT	0,32%	0,08%	0,32%	0,79%	2,22%	7,36%	15,60%	28,82%	17,74%	15,36%	6,41%	3,48%	0,95%	0,16%	0,08%	0,32%	1.263
	IBM	0,24%	0,32%	0,40%	1,19%	1,82%	5,07%	15,91%	22,49%	26,13%	15,91%	7,28%	2,22%	0,40%	0,08%	0,08%	0,16%	1.263
	Eastman Kodak	0,40%	0,16%	0,16%	0,48%	1,98%	4,43%	14,41%	31,51%	22,25%	15,91%	5,07%	1,90%	0,87%	0,00%	0,24%	0,24%	1.263
	Series semanales																	
	Banco Popular	0,00%	0,38%	1,15%	1,15%	1,92%	5,38%	16,54%	31,92%	17,31%	10,38%	7,31%	3,08%	1,15%	1,15%	0,38%	0,77%	260
	Banco Santander	0,77%	0,38%	0,77%	0,00%	2,31%	5,38%	8,85%	37,69%	22,69%	10,38%	5,38%	2,69%	0,77%	0,77%	0,00%	1,15%	260
	Iberduero	0,00%	0,00%	0,38%	1,92%	3,08%	6,54%	13,46%	29,23%	21,15%	12,31%	5,38%	1,54%	2,69%	0,77%	0,77%	0,77%	260
	Telefónica	0,38%	0,00%	0,77%	0,38%	3,85%	5,77%	14,23%	27,31%	25,38%	10,01%	4,62%	4,62%	0,77%	1,15%	0,00%	0,77%	260
	Hidroila	0,00%	0,77%	0,00%	1,15%	3,46%	5,00%	16,15%	25,77%	25,00%	11,15%	6,15%	2,69%	0,77%	0,00%	0,38%	1,54%	260
	ATT	0,38%	0,00%	0,38%	1,15%	5,00%	7,31%	15,38%	23,08%	19,62%	10,77%	9,62%	5,00%	1,15%	1,15%	0,00%	0,00%	260
	IBM	0,38%	0,77%	0,38%	1,92%	4,23%	6,92%	9,23%	25,00%	21,92%	16,54%	8,08%	1,92%	2,31%	0,38%	0,00%	0,00%	260
	Eastman Kodak	0,38%	0,38%	1,54%	1,54%	1,92%	8,08%	14,62%	19,62%	22,31%	17,31%	5,77%	4,62%	1,54%	0,00%	0,38%	0,00%	260
		Pronóstico normal																
		0,02%	0,11%	0,49%	1,65%	4,41%	9,18%	14,99%	19,15%	19,15%	14,99%	9,18%	4,41%	1,65%	0,49%	0,11%	0,02%	

* Los valores en negrita no superan el test. El valor crítico para aceptar la hipótesis de normalidad al 95% de confianza es $Q \leq 25$.

Tabla 5. Asimetría y curtosis. Series de índices de diversa periodicidad

Series diarias País	Código	Promedio	Desviación estándar		Curtosis (1)*	OBS	Total asimetría**	Test curtosis (1)**
			Asimetría*					
Estados Unidos	euvwd	0,070%	1,098%	-5,237	960,329	1.262	-75,955	676,768
Estados Unidos/simple	euwd	0,071%	0,890%	-4,514	95,699	1.262	-65,463	672,200
España	esvwd	0,112%	1,160%	-0,527	111,042	1.234	-7,554	57,666
España/simple	esewd	0,146%	1,216%	-0,613	12,197	1.234	-8,8-6	65,948
Series mensuales								
Francia	frvwm	0,941%	6,310%	-0,298	4,445	252	-1,931	4,682
Alemania	gevwm	0,593%	5,361%	-0,709	6,037	252	-4,594	9,940
Italia	itvwm	0,751%	7,099%	0,137	3,963	252	0,890	3,121
Reino Unido	ukvwm	1,141%	6,756%	0,363	10,395	252	2,351	23,962
España	esvwm	0,949%	5,014%	-0,287	7,342	600	-2,869	21,708
España simple	esewm	0,913%	4,953%	-0,637	10,500	600	-6,369	37,501
Estados Unidos	euvwm	0,928%	4,173%	-0,599	5,467	600	-5,992	12,335
Estados Unidos/simple	euwm	1,128%	5,418%	-0,420	6,767	600	-4,196	18,834
Series anuales								
Francia	frvwa	11,287%	26,266%	-0,202	1,761	21	-0,378	-1,155
Alemania	gevwa	7,119%	24,812%	-0,089	2,902	21	-0,166	-0,092
Italia	itvwa	9,017%	40,748%	0,407	2,331	21	0,762	-0,626
Reino Unido	ukvwa	13,687%	30,224%	-0,361	5,416	21	-0,675	2,260
España	esvwa	11,389%	22,200%	0,182	3,258	50	0,525	0,372
España/simple	esewa	10,950%	23,384%	0,290	3,070	50	0,837	0,101
Estados Unidos	euvwa	11,134%	15,414%	-0,477	2,736	50	-1,378	-0,381
Estados Unidos/simple	leuewa	13,533%	22,992%	-0,260	2,493	50	-0,750	-0,732

*Los coeficientes en negrita no superan el test al 90% de significatividad. Las distribuciones de estos valores se pueden encontrar en Hartley, H.O. y E.S. Pearson, «Biometrika Tables for Statisticians», vol. 1, Cambridge, 1962.

-Valores del estadístico "t". Los coeficientes en negrita significan que esa serie es estadísticamente distinta de la distribución normal al 95% de confianza.

(1) El test de curtosis no se aplica a las series anuales dado el escaso número de observaciones.

Tabla 6. Asimetría y curtosis de las series de empresas americanas y españolas. 1985-1989

Series diarias	Código	Desviación		Asimetría*	Curtosis (1)*	OBS	Total asimetría**	Test curtosis (1)**
		Promedio	estándar					
Banco Popular	bpod	0,150%	1,812%	0,046	5,684	1.234	0,663	19,242
Banco Santander	bsad	0,133%	1,073%	0,052	8,768	1.234	0,748	41,359
Iberduero	ibdd	0,081%	2,316%	0,348	6,868	1.234	4,993	27,733
Telefónica	teld	0,079%	2,036%	0,065	15,013	1.234	0,938	86,137
Hidroila	hidd	0,068%	2,382%	0,339	7,211	1.234	4,863	30,196
ATT	attd	0,084%	1,806%	-1,373	32,275	1.263	-19,915	212,373
IBM	ibrnd	-0,007%	1,538%	-3,861	70,179	1.263	-56,012	487,338
Eastman Kodak	iekd	0,037%	2,041%	-3,531	90,359	1.263	-51,224	633,731
Series semanales								
Banco Popular	bpos	0,689%	4,675%	0,516	5,006	260	3,396	6,601
Banco Santander	bsas	0,624%	3,069%	0,552	8,539	260	3,631	18,230
Iberduero	ibds	0,361%	5,173%	0,718	5,253	260	4,729	7,416
Telefónica	tels	0,358%	4,428%	-0,085	8,616	260	-0,559	18,485
Hidroila	hids	0,307%	5,032%	0,672	6,351	260	4,422	11,029
ATT	atts	0,378%	3,353%	0,052	3,416	260	0,343	1,368
IBM	ibms	-0,035%	2,739%	-0,520	4,242	260	-3,420	4,089
Eastman Kodak	ekds	0,188%	3,510%	-0,335	3,952	260	-2,204	3,133
Series mensuales								
Banco Popular	bpom	2,956%	10,275%	0,321	4,665	60	1,016	2,633
Banco Santander	bsam	2,694%	7,290%	0,648	4,998	60	2,050	3,159
Iberduero	ibdrn	1,345%	8,051%	0,165	3,250	60	0,522	0,395
Telefónica	telm	1,135%	8,748%	-0,660	6,911	60	-2,087	6,185
Hidroila	hidm	1,153%	9,177%	0,671	4,432	60	2,121	2,264
ATT	atmm	1,781%	6,886%	-0,293	2,610	60	-0,925	-0,616
IBM	ibmm	-0,154%	6,474%	-0,515	3,211	60	-1,630	0,333
Eastman Kodak	ekm	0,748%	7,040%	-0,373	3,939	60	-1,180	1,485

*Los coeficientes en negrita no superan el test al 90% de significatividad. Las distribuciones de estos valores se pueden encontrar en Hartley, H.O. y E.S. Pearson, «Biometrika Tables for Statisticians», vol. 1, Cambridge, 1962.

-Valores del estadístico "t". Los coeficientes en negrita significan que esa serie es estadísticamente distinta de la distribución normal al 95% de confianza.

(1) El test de curtosis no se aplica a las series mensuales dado el escaso número de observaciones.

Referencias

- Bachelier, Louis, «Théorie de la speculation», Gauthier-Villars, París, reimpresso en Cootner, Paul, «The Random Character of Stock Market Prices», MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- Blume, Marshall, «The Assesment of Portfolio Performance», disertación doctoral, Facultad de Administración de Empresas, Universidad de Chicago, 1968.
- Cootner, P.H., «The Random Character of Stock Market Prices», MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- David, H.A., H.O. Hartley y E.S. Pearson, «The distribution of the Ratio, in a Single Normal Sample, of Range to Standard Deviation», *Biometrika*, 61, 1964, pág. 491.
- Fama, Eugene (a), «The Behavior of Stock Market Prices», *Journal of Business*, 38, enero de 1965.
- Fama, Eugene (b), «Foundations of Finance», Basic Books, Inc. Publishers, Nueva York, 1976.
- Fama, E.F. y R. Roll, «Some porperties fo Symetric Stable Distributions» *Journal of American Statistical Association*, 63, septiembre de 1968.
- Fama, E.F. y R. Roll, «Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions», *Journal of American Statistical Association*, 66, junio de 1971.
- Hartley, H.O. y E.S. Pearson, «Biometrika Tables for Statisticians», vol. 1, Cambridge University Press, 1962.
- Hogg, R. y J. Ledolter, «Engineering, Statistics», Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1987.
- Krishnaiah, P.R., «Multivariate Analysis», tomo III, Academic Press, Nueva York, 1973.
- Krishnaiah, P.R., «Handbook of Statistics 1. Analysis of Variance», cap. 9, North-Holland Publishing, Amsterdam, 1980.
- Mandelbrot, Benoit (a), «New Methods in Statistical Economics», *Journal of Political Economy*, 61, octubre de 1963, págs. 421-440.
- Mandelbrot, Benoit (b), «The Variation of Certain Speculative Prices», *Journal of Business*, 39, octubre de 1963, págs. 394-419.
- Martínez Abascal, Eduardo, «Eficiencia débil del mercado bursátil español y comparaciones internacionales», *Serie de estudios bursátiles*, 3, Bolsa de Madrid, 1992.
- Officer, Robert, «A Time series examination of the Market Factor of the New York Stock Exchange», disertación doctoral, Universidad de Chicago, 1971.
- Osborne, M.F.M., «Brownian Motion in the Stock Market», *Operations Research* 7, marzo-abril de 1959, reimpresso en Cootner, Paul, «The Random Character of Stock Market Prices», MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- Selby, Samuel, «Standard Mathematical Tables», vigésima edición, The Chemical Rubber Co, Cleveland, 1972.